Ensemble bornant superieur base sur la relaxation surrogate pour un sac-à-dos bi-objectif bi-dimensionnel

Audrey Cerqueus, Xavier Gandibleux, Anthony Przybylski

Ensemble bornant supérieur basé sur la relaxation surrogate pour un sac-à-dos bi-objectif bi-dimensionnel

Audrey Cerqueus[1], Xavier Gandibleux[1], Anthony Przybylski[1]

LINA UMR CNRS 6241, Université de Nantes
2 rue de la Houssinière, 44 322 Nantes Cedex 3, France
{Audrey.Cerqueus}@etu.univ-nantes.fr,
{Xavier.Gandibleux,Anthony.Przybylski}@univ-nantes.fr

Mots-clés : *optimisation combinatoire multi-objectif, sac-à-dos bi-objectif bi-dimensionnel, ensemble bornant, relaxation surrogate*

1 Contexte du travail

1.1 Le problème de sac-à-dos bi-objectif bi-dimensionnel

Le problème de sac-à-dos mono-objectif mono-dimensionnel (KP) est un problème classique de l'optimisation combinatoire. Bien que ce problème soit NP-difficile, plusieurs algorithmes en temps pseudo polynomial ont été développés pour le résoudre [1]. Le problème de sac-à-dos bi-objectif bi-dimensionnel (2O2DKP) est une généralisation de KP, visant à représenter plus fidèlement les problèmes réels. Une instance de 2O2DKP est constituée de n variables binaires sujettes à deux contraintes linéaires de capacité et maximisant simultanément deux objectifs de type somme. Une formulation mathématique de ce problème est la suivante :

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} c_j^k . x_j && k = 1, 2 \\
&s.t. \sum_{j=1}^{n} w_{ij} . x_j \leq \omega_i && i = 1, 2 \\
&x_j \in \{0, 1\} && j = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{2O2DKP}
$$

Le 2O2DKP est connu pour être NP-difficile. À notre connaissance, seule une méthode de résolution exacte a été proposée pour ce problème [2]. Dans cette méthode, l'espace de cherche est réduit à l'aide d'ensembles bornants supérieurs et inférieurs [3]. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'élaboration d'un ensemble bornant supérieur serré pour le 2O2DKP.

1.2 La relaxation surrogate

La relaxation surrogate [4] peut être utilisée pour calculer une borne supérieure pour le problème de sac-à-dos mono-objectif présentant au moins deux contraintes de capacité. Cette relaxation consiste à agréger les contraintes du problème à l'aide d'un multiplicateur u. Dans le cas bi-dimensionnel, la contrainte de capacité de la relaxation s'écrit : $\sum_{j=1}^{n} u.w_{1j}.x_j + \sum_{j=1}^{n}(1-u).w_{2j}.x_j \leq u.\omega_1 + (1-u).\omega_2$. Le résultat correspond à un problème de sac-à-dos mono-dimensionnel. La résolution de ce dernier donne une borne supérieure du problème initial dont la qualité dépend du multiplicateur u utilisé. En mono-objectif, les bornes obtenues par la relaxation surrogate sont toujours comparables. Le problème d'obtenir la meilleure borne issue de la relaxation surrogate (le dual surrogate) se définit aisément ; sa formulation mathématique est :

$$\min_{u\in[0,1]} \max\{\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j | \sum_{j=1}^{n} u.w_{1j}.x_j+\sum_{j=1}^{n}(1-u).w_{2j}.x_j \leq u.\omega_1+(1-u).\omega_2, x_j \in \{0,1\}\ j=1,\dots,n\}$$

Plusieurs méthodes exactes ou approchées ont été élaborées pour résoudre le problème dual surrogate. Ces méthodes sont fréquemment utilisées pour résoudre le problème du sac-à-dos mono-objectif bi-dimensionnel [5].

Dans le cas bi-objectif, la relaxation surrogate nous permet d'obtenir une instance de sac-à-dos mono-dimensionnel bi-objectif. En utilisant un ensemble bornant pour ce dernier problème, nous obtenons un ensemble bornant pour le 2O2DKP. En particulier, un ensemble bornant pour le 2O2DKP peut être obtenu en résolvant la relaxation convexe de la relaxation surrogate (appelée *relaxation surrogate convexe* par la suite). Dans [2], il est montré que les ensembles bornant obtenus en utilisant différents multiplicateurs ne sont pas nécessairement comparables. Il y est aussi montré que l'intersection de l'espace induit par chacun des ensembles bornant définit un ensemble bornant correct pour le 2O2DKP, dominant les premiers. Il est donc plus serré.

2 Les contributions

Dans ce travail, nous avons cherché à généraliser la notion de dual surrogate dans le cas bi-objectif. Cette définition peut alors s'étendre de différentes façons. Nous cherchons en fait un ensemble bornant le plus serré possible en se basant sur la relaxation surrogate convexe. Nous devons donc utiliser tous les ensembles bornants possibles se basant sur cette relaxation. Si le nombre de multiplicateurs possibles est infini, le nombre d'ensembles bornant obtenus avec ces multiplicateurs est fini. L'ensemble bornant que nous souhaitons obtenir est donc bien défini et nous le nommons l'*Optimal Convex Surrogate* (OCS).

Nous identifions les intervalles de valeurs pour le multiplicateur u pour lesquels la relaxation surrogate convexe est inchangée. Nous obtenons également des valeurs critiques indiquant donc une modification de l'ensemble bornant obtenu. Ces observations nous ont permis de développer une méthode exacte et une méthode approchée pour trouver l'OCS.

Nous avons testé numériquement ces deux méthodes sur un jeu d'instances de 2O2DKP et nous les avons comparées à une méthode d'échantillonnage uniforme des multiplicateurs pour la relaxation surrogate convexe. Les résultats obtenus sont de bonne qualité et ouvrent la perspective d'une utilisation de ce calcul d'ensemble bornant dans une méthode de résolution exacte du 2O2DKP.

Remerciements : Ce travail a été soutenu par le projet ANR-09-BLAN-0361 "GUaranteed Efficiency for PAReto optimal solutions Determination (GUEPARD)".

Références

[1] H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger, Knapsack problems, Springer, 2004.

[2] O. Perederееva, Bound sets for bi-objective bi-dimensional knapsack problem, Master thesis, Université de Nantes (2011).

[3] M. Ehrgott, X. Gandibleux, Bound sets for biobjective combinatorial optimization problems, Computers and Operations Research 34 (9) (2007) 2674 – 2694.

[4] F. Glover, Surrogate Constraint Duality in Mathematical Programming, Operations Research 23 (1975) 434–451. doi :10.1287/opre.23.3.434.

[5] A. Freville, The multidimensional 0-1 knapsack problem : An overview, European Journal of Operational Research 155 (1) (2004) 1 – 21. doi :10.1016/S0377-2217(03)00274-1.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221703002741`